

# Solución al problema de medir aceleraciones usando un teléfono inteligente: enfrentando a la relatividad general.

Martín Monteiro<sup>(a)</sup>, Cecilia Cabeza<sup>(b)</sup>, Arturo C. Martí<sup>(c)</sup>

<sup>(a)</sup>Universidad ORT Uruguay. Email: [monteiro@ort.edu.uy](mailto:monteiro@ort.edu.uy)

<sup>(b)</sup>Instituto de Física, Facultad de Ciencias. Universidad de la República, Uruguay. Email: [cecilia@fisica.edu.uy](mailto:cecilia@fisica.edu.uy)

<sup>(c)</sup>Instituto de Física, Facultad de Ciencias. Universidad de la República, Uruguay. Email: [marti@fisica.edu.uy](mailto:marti@fisica.edu.uy)

Aceptado para publicación en la revista de la Asociación de Profesores de Física del Uruguay, *Educación en Física Vol. 8, N° 6, setiembre 2016, 15-24.*

## Resumen

Los sensores de aceleración disponibles en *smartphones*, *Ipads*, o *tablets* son frecuentemente empleados en laboratorios de enseñanza de la Física. Cuando el dispositivo se encuentra acelerado, estos acelerómetros, en lugar de una aceleración absoluta, reportan una aceleración aparente. En general, debido a las limitaciones impuestas por el principio de equivalencia, no es posible en un sistema aislado discernir entre un campo gravitatorio y un sistema de referencia no inercial acelerado. En este trabajo se muestra utilizando un péndulo físico, cómo obtener el ángulo de giro y la aceleración absoluta a partir de las medidas obtenidas por medio del acelerómetro y del giroscopio. Se discuten las limitaciones de los diferentes sensores presentes en estos dispositivos. Los resultados obtenidos son corroborados por medio del análisis de vídeos.

## 1. Planteamiento del problema

El uso de teléfonos inteligentes y otros dispositivos similares se ha extendido vertiginosamente en los últimos años en todo el mundo. El empleo de estos dispositivos ha trascendido más allá de los ámbitos para los cuáles estaban inicialmente dirigidos. En efecto, esta revolución impactó también en los laboratorios de enseñanza donde diversas experiencias se ven facilitadas por el uso de los sensores con los que habitualmente cuentan estos dispositivos. Recientemente, en varios artículos, el empleo de teléfonos inteligentes ha sido propuesto en varias experiencias que abarcan temáticas de mecánica [1-5], electromagnetismo [6-7], óptica [8], oscilaciones [9-10] y ondas [11-12] entre otras.

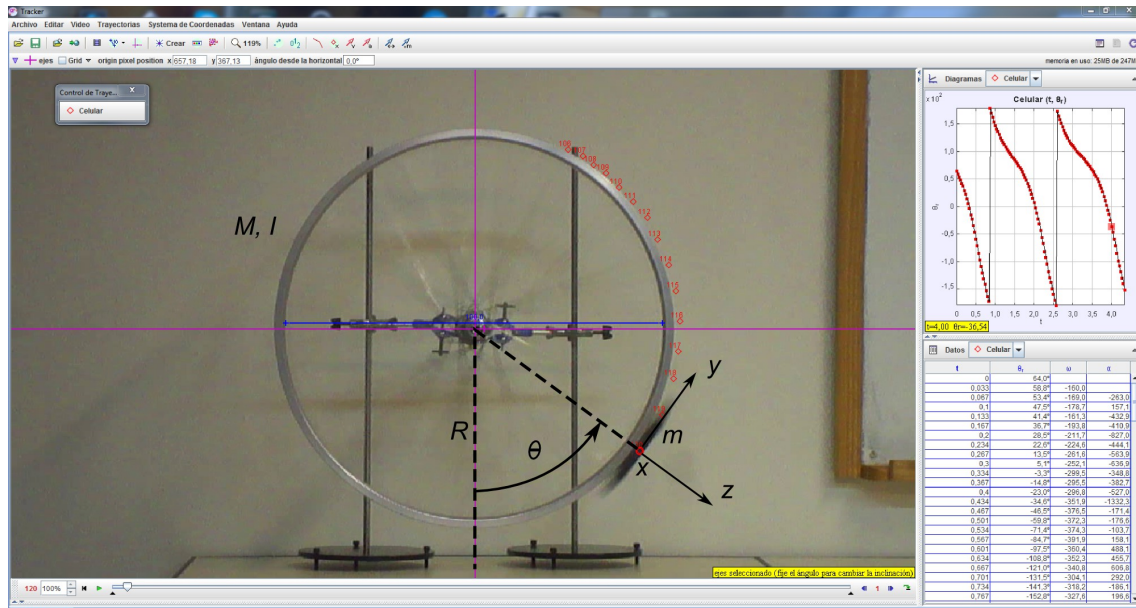
Varios de los trabajos citados anteriormente se centran en experiencias de mecánica, más específicamente, en la medida de la aceleración gravitatoria [13], en la energía elástica o en el estudio de péndulos simple [14], físico, elástico [15] y de torsión. En un trabajo reciente [16], se estudia la conservación del momento angular utilizando el sensor de rotación o giroscopio de un smartphone montado en una mesa rotatoria. El sensor de rotación también ha sido utilizado para calcular la energía cinética de rotación de un péndulo físico [17].

Un paso adelante en el aprovechamiento de estos dispositivos se presenta con la posibilidad de emplear simultáneamente los sensores de aceleración y rotación. En un trabajo se reporta una experiencia en la cuál se coloca un smartphone en una calesita a diferentes distancias del centro de rotación [18]. A partir de las medidas de los sensores se obtiene la aceleración centrípeta y la velocidad angular y gracias a una regresión lineal se relacionan las medidas con el radio de giro del dispositivo. Siguiendo esta línea de uso simultáneo de los sensores de aceleración y rotación, en otro trabajo también reciente [19, 20] los autores estudian un péndulo físico. En la experiencia planteada un teléfono inteligente se fija en la parte exterior de una rueda de bicicleta y se pone en movimiento tanto en régimen de rotación (dando vueltas completas en una dirección) como de oscilación (alrededor del punto de equilibrio estable) ya sea de pequeñas o de grandes amplitudes. Gracias a los sensores se obtienen medidas de aceleración y velocidad angular según diferentes ejes solidarios con el teléfono. Esta medida simultánea permite, en el caso relativamente sencillo de un sistema con un grado de libertad, la obtención de la coordenada generalizada y su momento conjugado y por consiguiente es posible representar trayectorias en el espacio de fases. Este último concepto, más bien abstracto, se vuelve de esta forma más tangible.

Un aspecto importante que ha recibido escasa atención proviene del hecho que los sensores de aceleración, cuando el dispositivo se encuentra en un sistema acelerado, miden de hecho una aceleración *aparente*. La obtención de la aceleración absoluta o *real* (referida al sistema de laboratorio) no es trivial pues debido a limitaciones impuestas por el *principio de equivalencia* no siempre es posible discernir entre un sistema sometido a un campo gravitatorio y un sistema no inercial acelerado. En este trabajo se obtiene la aceleración real, medida en el sistema de laboratorio, y el ángulo de giro del smartphone a partir de las medidas de los sensores de aceleración y de giro. El procedimiento propuesto tiene la restricción que el sistema se mueve en un plano con 1 grado de libertad. Los resultados obtenidos con el smartphone se contrastan con medidas independientes realizadas a partir del análisis de vídeos. Dado que el uso de los sensores de los smartphones se está extendiendo en los laboratorios de enseñanza, este trabajo busca brindar un aporte orientado hacia el mejor aprovechamiento de este recurso por parte de estudiantes y profesores.

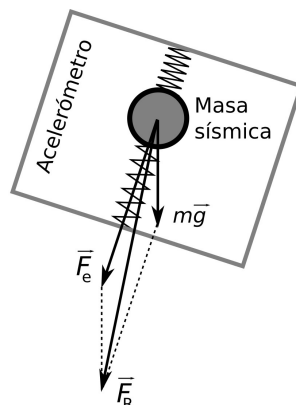
## **2. Montaje experimental: péndulo físico y sensores.**

Un péndulo físico se define como un cuerpo rígido que gira en un plano alrededor de un eje horizontal bajo el efecto de la fuerza de la gravedad. En esta experiencia el péndulo físico está constituido por una rueda de bicicleta con su eje horizontal y fijo y que puede girar libremente en un plano vertical y un smartphone montado en la periferia de la rueda como muestra la Fig. 1. Se utilizó un smartphone con sistema Android (LG G2 D805) con sensores LGE STMicroelectronics: 3-axis acelerómetro, precisión 0,001 m/s<sup>2</sup>, 3-axis giroscopio, precisión 0,001 rad/s. La localización precisa de los sensores dentro del smartphone fue obtenida a partir de las información técnica provista por el fabricante y verificada por métodos físicos [19]. Como aplicación para registrar los valores medidos por los sensores se escogió Androsensor [22].



**Figura 1.** Dispositivo experimental formado por una rueda de bicicleta con su eje horizontal fijo y un smartphone. Se indican también las coordenadas utilizadas. La imagen es una captura de pantalla del análisis de video realizado con Tracker.

Para aprovechar adecuadamente las posibilidades que brindan estos dispositivos es necesario entender los aspectos fundamentales de su funcionamiento. Los sensores de aceleración disponibles son en realidad, debido a su construcción, sensores de fuerza [1, 21, 23]. Estos sensores miden la fuerza normal ejercida sobre una partícula de prueba (o *partícula sísmica*) por una cerámica piezoeléctrica o un capacitor micro-mecanizado como se muestra en el esquema de la figura 2. Por este motivo, cuando se quiere obtener la aceleración real del dispositivo se debe restar el término gravitatorio ( $m\vec{g}$ ) de acuerdo a lo indicado en la figura 2. Esta transformación no ofrece dificultades si el smartphone está en reposo o si su movimiento es rectilíneo uniforme. En caso contrario, si el aparato se encuentra acelerado en una dirección arbitraria, las limitaciones impuestas por el principio de equivalencia, obligan a recurrir a medidas complementarias.



**Figura 2.** Esquema de un sensor de aceleración, se muestra una partícula de prueba o sísmica y las fuerzas elástica,  $F_e$ , y gravitatoria,  $m\vec{g}$ , y la resultante de ambas  $F_R$  ejercidas sobre la misma.

Además del acelerómetro, en este trabajo se hará uso del sensor de rotación, también denominado giroscopio o sensor de giro. Su nombre no debe permitir que se confunda con los clásicos giróscopos basados en mecanismos rotantes montados sobre soportes cardánicos. Los modernos sensores de velocidad angular que se encuentran en los smartphones se denominan giroscopios porque son sensores de giro o medidores de giro. Estos sensores son Sistemas Electro-Mecánicos Micro-Maquinados (MEMS -Micro-machined Electro-Mechanical Systems) que miden la fuerza de Coriolis sobre un objeto vibrante. Es importante destacar que estos sensores proporcionan una medida directa de la velocidad angular del dispositivo expresada en un sistema de ejes solidarios al dispositivo.

En muchos modelos de smartphones están presentes también dos pseudosensores: de orientación y de aceleración lineal. Este último pretende medir la aceleración del dispositivo excluyendo el efecto de la gravedad. El pseudosensor de orientación por su lado integra información de diversos sensores, incluyendo el campo magnético terrestre, para dar una medida de la orientación del dispositivo. A lo largo de este trabajo, se comparan los resultados obtenidos con las medidas de estos pseudosensores y se discuten las limitaciones de los mismos.

Habitualmente los sensores miden todas las componentes de las magnitudes vectoriales según 3 ejes,  $x,y,z$  orientados como si estuvieran *dibujados* sobre la pantalla del celular. Las medidas que se emplean en este trabajo son las del sensor de rotación según el eje  $x$  y los de la aceleración según los ejes  $y$  y  $z$ , que se corresponden con las aceleraciones tangencial y radial respectivamente. Una vez registrados los datos es posible descargarlos en una computadora y analizarlos utilizando un programa apropiado.

Con el propósito de contar con una medida independiente del movimiento del sistema, la experiencia fue registrada en vídeo. Se colocó una cámara digital orientada frontalmente respecto al sistema y con el centro del campo focal coincidente con el eje de rotación de la rueda de forma de minimizar los errores de paralaje. Una vez registrado el movimiento y usando una escala de longitud apropiada (en este caso la distancia desde el centro de la rueda hasta el borde interior de la llanta), el vídeo fue analizado utilizando el conocido programa *Tracker*, [24].

### 3. Aceleración absoluta y ángulo de giro

La evolución temporal del ángulo de giro  $\theta(t)$ , medida a partir de la posición de equilibrio estable como se indica en la Fig. 1, se obtiene a partir de la Segunda Ley de Newton. Despreciando el rozamiento, la ecuación de movimiento del sistema está dada por

$$-m g R \operatorname{sen} \theta = I \ddot{\theta} \quad (1)$$

donde  $m$  es la masa del celular,  $R$  es la distancia al centro de masa, e  $I$  es el momento de inercia del sistema compuesto por la rueda y el smartphone

La aceleración del celular en el sistema de laboratorio es

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \hat{r} + R\ddot{\theta} \hat{\theta} \quad (2)$$

donde  $R$  es la distancia del centro de rotación al centro de masa del celular localizado muy próximo a los sensores. Los versores polares elegidos coinciden con los ejes del celular: el versor radial con el eje  $z$  ( $\hat{r} = \hat{z}$ ) y el versor tangencial con el eje  $y$  ( $\hat{\theta} = \hat{y}$ ). El sensor giroscópico del eje  $x$ , mide la velocidad angular en ese eje de forma directa [23], por lo que

$$\omega_x = -\dot{\theta}, \quad (3)$$

donde el signo se debe a la orientación de los ejes. Observar que en el esquema de la figura 1, el eje  $x$  es entrante mientras que el sentido de rotación está dado por el eje  $y$ , que en este caso es positivo (antihorario).

La aceleración medida por el sensor de aceleración, en cambio, no es una medida de la aceleración *real* observada desde el laboratorio sino que es una aceleración *aparente*,  $\vec{a}'$ , resultando de la suma vectorial de la aceleración real y la aceleración producida por un campo gravitatorio dirigido en sentido opuesto al real

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{g} \quad (4)$$

Las componentes de la aceleración aparente medidas por los sensores según los ejes  $y$  y  $z$  del smartphone son

$$a'_y = R\ddot{\theta} + g \sin \theta \quad (5)$$

$$a'_z = -R\dot{\theta}^2 - g \cos \theta \quad (6)$$

De las ecuaciones (2), (3) y (6) se tiene una de las proyecciones de la posición en función de las medidas del celular:

$$\cos(\theta) = -\frac{a'_z + R\omega_x^2}{g} \quad (7)$$

Mientras que de la otra proyección de las ecuaciones (1), (2) y (5) se obtiene

$$\sin(\theta) = -\frac{a'_y}{g \left( 1 - \frac{m R^2}{I} \right)} \quad (8)$$

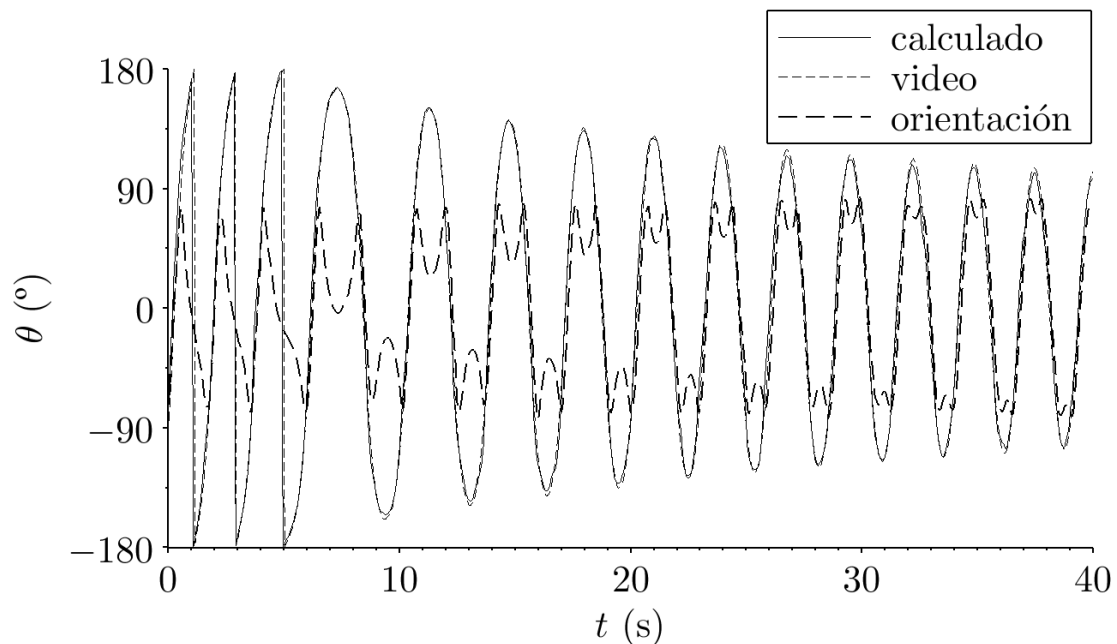
De este modo, utilizando conjuntamente las ecuaciones (7) y (8), es posible decodificar la coordenada generalizada del sistema.

Vale la pena observar que el divisor de la ecuación (8) es siempre positivo dado que el momento de inercia de un sistema (rueda y smartphone) es siempre mayor que el momento de inercia de una de sus partes,  $I > m R^2$ . El caso límite de la igualdad,

$I = m R^2$ , correspondería a un péndulo simple, y la ecuación (8) evidentemente quedaría indeterminada, lo cual no es de extrañar pues solo es válida para el péndulo físico.

#### 4. Resultados

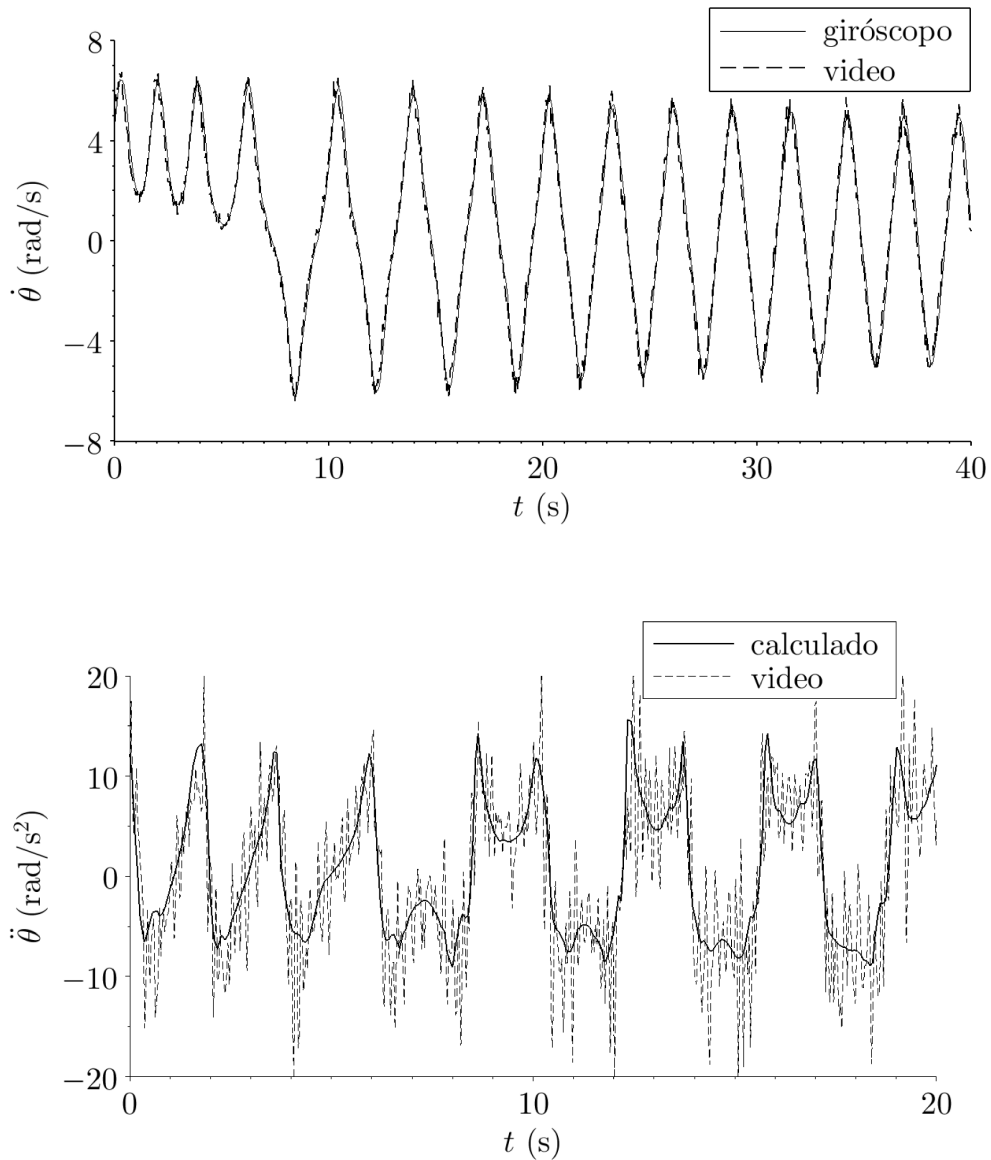
Para analizar la dinámica del sistema, el péndulo físico se puso en movimiento con una energía suficiente para que diese vueltas completas en un sentido. El movimiento fue registrado usando tanto los sensores del smartphone como la cámara de vídeo. En la figura 3 observamos la evolución temporal del ángulo de giro calculado tanto a partir de las ecs. (7) y (8), como el obtenido por medio del análisis de vídeo por medio del *Tracker*. También se incluye una tercera medida obtenida por medio del pseudosensor de orientación. Se puede concluir de esta gráfica que el procedimiento descrito en la sección anterior concuerda con las medidas obtenidas por el análisis de vídeo a lo largo de toda la realización. Asimismo, las medidas obtenidas por el sensor de orientación concuerdan con los resultados solamente si el ángulo es menor que  $90^\circ$ . Eso es una consecuencia de la forma peculiar en que están diseñado el pseudosensor de orientación.



**Figura 3.** Evolución temporal del ángulo de giro. Se muestra el ángulo obtenido por medio de las Ecs. (7) y (8), por medio de los vídeos y el reportado por el pseudosensor de orientación.

La velocidad y la aceleración angular en función del tiempo obtenidas tanto por el sensor de rotación y por medio del análisis de vídeo se muestra en la figura 4. En el caso del giroscopio, la velocidad angular se obtiene directamente del sensor mientras que en el análisis de vídeo se obtiene por medio de la derivada numérica del ángulo. Las aceleraciones angulares obtenidas en esta figura corroboran en general la excelente concordancia entre ambos procedimientos. Sin embargo, debido a la derivada numérica y a que el tiempo de muestreo de la cámara digital y la localización del objeto

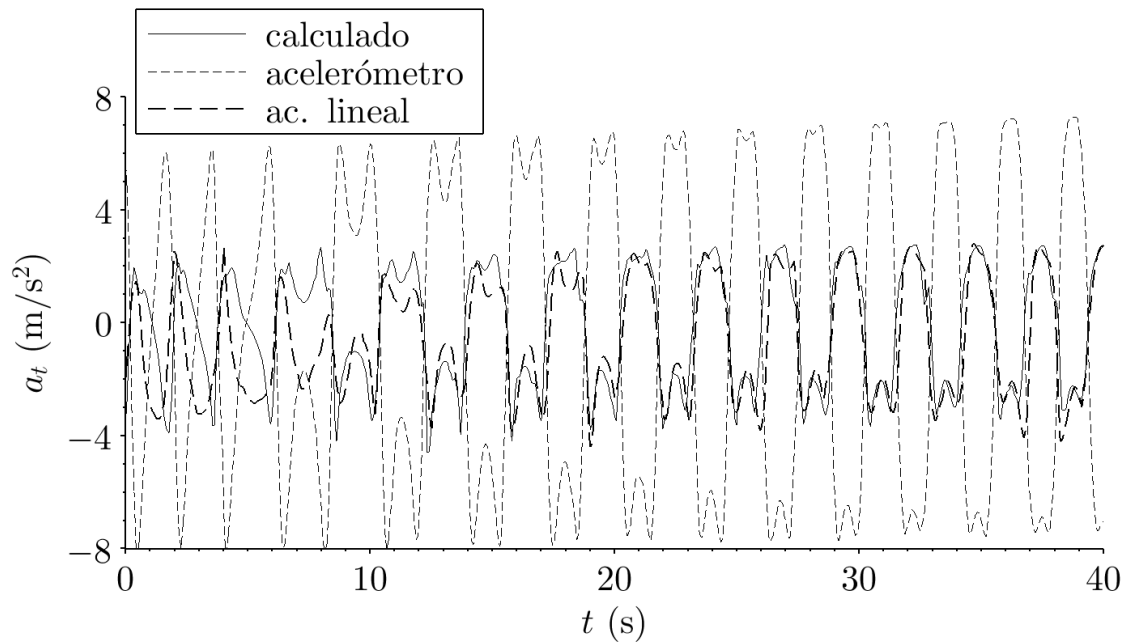
en cada cuadro no es tan precisa, la velocidad angular y especialmente la aceleración angular obtenida por medio de los vídeos presenta más ruido que las obtenidas con el sensor de giro.



**Figura 4.** Comparación de las medidas del giroscopio y el análisis de video. Evolución temporal de la velocidad angular (arriba) y de la aceleración angular (abajo).

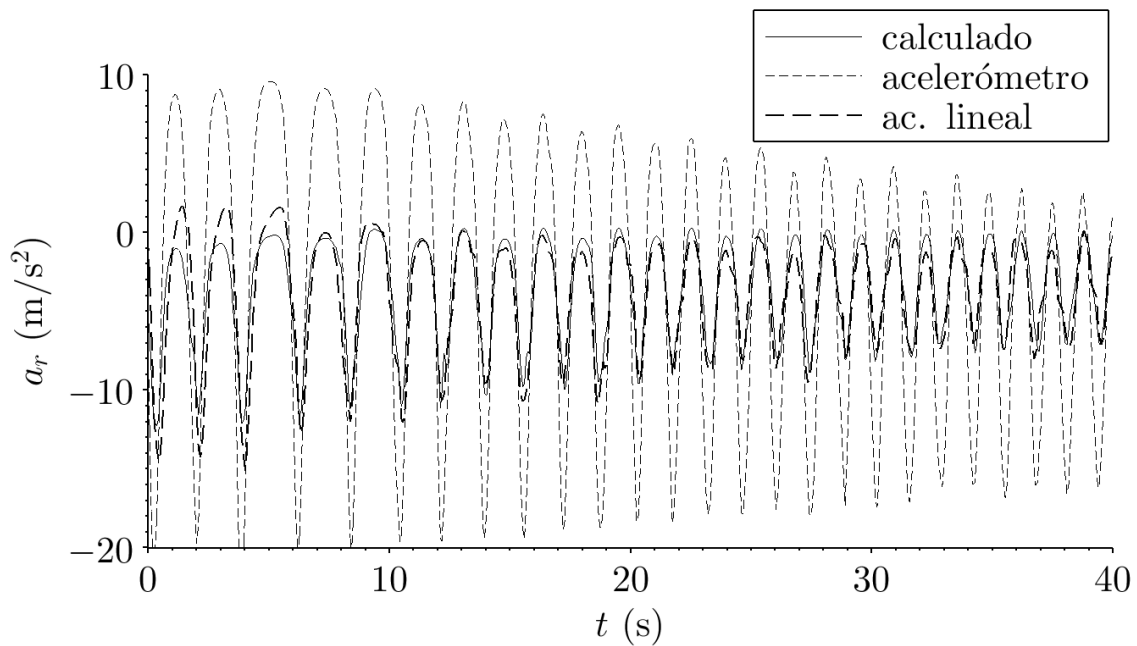
Las dos componentes de la aceleración se muestran en las figuras 5 y 6. Se comparan las aceleraciones, radial y tangencial, determinadas a partir de las ecuaciones calculadas en la sección anterior, con la medida del pseudosensor de aceleración lineal y la aceleración aparente. En la figura 5 se muestra la evolución de la aceleración tangencial. Como era de esperar, la aceleración aparente difiere claramente de la aceleración absoluta calculada por el procedimiento descrito en la sección anterior. Por otro lado, el pseudosensor de aceleración lineal reporta resultados también incorrectos,

especialmente cuando el celular se mueve cerca del punto de equilibrio inestable.



**Figura 5.** Evolución temporal de la aceleración tangencial calculada por el procedimiento descrito en el texto. Esta medida se compara con las reportadas, ambas incorrectas, por el acelerómetro y el acelerómetro lineal del smartphone.

En la figura 6, se ilustra la aceleración radial en función del tiempo. Igual que para la aceleración tangencial se observan discrepancias entre la aceleración absoluta calculada y la reportada por los sensores.



**Figura 6.** Comparación similar a la Fig. 5 para la aceleración radial.



## 5. Conclusiones y Perspectivas

En este trabajo se mostró como obtener el ángulo de giro y la aceleración real de un péndulo físico a partir de las medidas de los sensores de aceleración y rotación de un smartphone. Dada que el principio de equivalencia impone serias limitaciones a las medidas de aceleración hechas desde un sistema no inercial, la medida de la aceleración real debió ser complementada, además de las medidas del propio sensor de aceleración con medidas del sensor de rotación. Para corroborar el procedimiento descrito se usó como medida independiente el análisis de vídeos de la experiencia.

Para concluir señalamos que el uso de sensores disponibles en los teléfonos inteligentes permite un espectro amplio de medidas aplicables que abarca un espectro muy amplio de temas de la Física. Se trata de un herramienta invaluable y esperamos que su uso se expanda aún más debido a su creciente disponibilidad y descenso en los costos. Sin embargo, la experiencia sugiere que es necesario comprender los aspectos básicos de su funcionamiento para lograr un aprovechamiento cabal de sus posibilidades.

### Referencias:

- [1] Vogt, P., Kuhn, J., "Analyzing free fall with a smartphone acceleration sensor," *The Physics Teacher*, 50(3), 182-183, (2012).
- [2] Chevrier, J., Madani, L., Ledenmat, S., Bsiesy, A., "Teaching classical mechanics using smartphones," *The Physics Teacher*, 51(6), 376-377, (2013).
- [3] Monteiro, M., Cabeza, C., Martí, A. C., "Con la Física a todas partes: experiencias utilizando el teléfono inteligente," *Educación en Física(A.P.F.U.)*, 8(4), 17-26, (2014).
- [4] Streepey, J. W., "Using iPads to illustrate the impulse-momentum relationship," *The Physics Teacher*, 51(1), 54-55, (2013).
- [5] Castro-Palacio, J. C., Velazquez, L., Gómez-Tejedor, J. A., Manjón, F. J., Monsoriu, J. A., "Using a smartphone acceleration sensor to study uniform and uniformly accelerated circular motions," *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 36(2), 2315, (2014).
- [6] Silva, N., "Magnetic field sensor," *The Physics Teacher*, 50(6), 372-373, (2012).
- [7] Forinash, K., Wisman, R. F., "Smartphones as portable oscilloscopes for physics labs," *The Physics Teacher*, 50(4), 242-243, (2012).
- [8] Thoms, L. J., Colicchia, G., Girwidz, R., "Color reproduction with a smartphone," *The Physics Teacher*, 51(7), 440-441, (2013).
- [9] Castro-Palacio, J. C., Velázquez-Abad, L., Giménez, M. H., Monsoriu, J. A., "Using a mobile phone acceleration sensor in physics experiments on free and damped harmonic oscillations," *American Journal of Physics*, 81(6), 472-475, (2013).

- [10] Sans, J. A., Manjón, F. J., Pereira, A. L. J., Gómez-Tejedor, J. A., Monsoriu, J. A., "Oscillations studied with the smartphone ambient light sensor," *European Journal of Physics*, 34(6), 1349, (2013).
- [11] Parolin, S. O., Pezzi, G., "Smartphone-aided measurements of the speed of sound in different gaseous mixtures," *The Physics Teacher*, 51(8), 508-509, (2013).
- [12] Kuhn, J., Vogt, P., "Analyzing acoustic phenomena with a smartphone microphone," *The Physics Teacher*, 51(2), 118-119, (2013).
- [13] Kuhn, J., Vogt, P., "Smartphones as experimental tools: Different methods to determine the gravitational acceleration in classroom physics by using everyday devices," *European J of Physics Education*, 4(1), 16, (2013).
- [14] Vogt, P., Kasper, L. and Burde, J-P., "The sound of church bells: Tracking down the secret of a traditional arts and crafts trade," *The Physics Teacher*, 53(8), 438-439, (2015).
- [15] Kuhn, J., Vogt, P., "Analyzing spring pendulum phenomena with a smart-phone acceleration sensor," *The Physics Teacher*, 50(8), 504-505, (2012).
- [16] Shakur, A., Sinatra, T., "Angular momentum," *The Physics Teacher*, 51(9), 564-565, (2013).
- [17] Monteiro, M., Cabeza, C., Marti, A. C., "Rotational energy in a physical pendulum," *The Physics Teacher*, 52(3), 180-181, (2014).
- [18] Monteiro, M., Cabeza, C., Marti, A. C., Vogt, P., Kuhn, J., "Angular velocity and centripetal acceleration relationship," *The Physics Teacher*, 52(5), 312-313, (2014).
- [19] Monteiro, M., Cabeza, C., Martí, A. C., "Exploring phase space using smartphone acceleration and rotation sensors simultaneously," *European Journal of Physics*, 35(4), 045013, (2014).
- [20] Monteiro, M., Cabeza, C., Martí, A. C., "Análisis del movimiento de un péndulo físico utilizando el teléfono inteligente," *Educación en Física (A.P.F.U.)*, 8(5), 37-43, (2015).
- [21] Monteiro, M., Cabeza, C., Martí, A. C., "Acceleration Measurements Using Smartphone Sensors: Dealing with the Equivalence Principle," *Revista Brasileira Ensino de Física*, 37(1), 1303, (2015).
- [22] Google, <http://play.google.com> , last visited, (2016).
- [23] SensorWiki, <http://sensorwiki.org> , last visited, (2016).
- [24] D. Brown, Tracker: Herramienta de modelado y análisis de video para enseñanza de la física, <http://www.opensourcephysics.org/items/detail.cfm?ID=7365> (visto: 2016).